Versuchsplanung
WS 2006/07

Formelsammlung

Erwin Grüner
FB Psychologie

Stichprobenverfahren

Uneingeschränkte Zufallsauswahl

Konfidenzintervall für den Populationsmittelwert

$$\bar{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{X}} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

Konfidenzintervall für eine Wahrscheinlichkeit

$$p \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Schichtenstichprobe

Schätzung des Populationsmittelwerts bzw. einer Wahrscheinlichkeit

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \sum g_i \bar{X}_i \qquad \hat{\pi} = p = \sum g_i p_i$$

Schätzung des Standardfehlers von $\bar{X}$ bzw. p

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \sqrt{\sum g_i^2 \frac{s_i^2}{n_i}} \qquad \hat{\sigma}_p = \sqrt{\sum g_i^2 \frac{p_i(1-p_i)}{n_i}}$$

Proportionale bzw. bestmögliche Aufteilung

$$n_i = n g_i \qquad \text{bzw.} \qquad n_i = n \frac{g_i \sigma_i}{\sum g_j \sigma_j}$$

Einfache Varianzanalyse

Strukturmodell

$$X_{im} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{im} \qquad (\alpha_i = \mu_i - \mu)$$

Quadratsummen

$$QS_{Total} = \sum\sum (X_{im} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 \qquad QS_{Zw} = n \sum (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 \qquad QS_{Inn} = \sum\sum (X_{im} - \bar{X}_{i\cdot})^2$$

Effektstärke

$$\eta^2 = \frac{QS_{Zw}}{QS_{Total}}$$

Prüfung spezieller Hypothesen

Kontrast

$$\hat{\psi} = \sum c_i \bar{X}_{i\cdot} \quad (\sum c_i = 0) \qquad QS_{\psi} = n \frac{\hat{\psi}^2}{\sum c_i^2}$$

Test des Kotrasts

A priori: $F = \frac{QS_{\psi}}{MQ_{Inn}} \quad (df_1 = 1,\ df_2 = df_{Inn})$

A posteriori: $F = \frac{QS_{\psi}/(p-1)}{MQ_{Inn}} \quad (df_1 = p-1,\ df_2 = df_{Inn})$

Orthogonale Kontraste

$$\sum c_i c_i' = 0$$

Koeffizienten für Trendtests (orthogonale Polynome)

Stufen	Trend	Koeffizienten					$\sum c_i^2$
3	linear	-1	0	1			2
	quadratisch	1	-2	1			6
4	linear	-3	-1	1	3		20
	quadratisch	1	-1	-1	1		4
	kubisch	-1	3	-3	1		20
5	linear	-2	-1	0	1	2	10
	quadratisch	2	-1	-2	-1	2	14
	kubisch	-1	2	0	-2	1	10
	quartisch	1	-4	6	-4	1	70

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit unabhängigen Gruppen

Effekte

$$\alpha_i = \mu_i - \mu \qquad \beta_j = \mu_j - \mu \qquad \alpha\beta_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j)$$

Strukturmodell

$$X_{ijm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijm}$$

Quadratsummenzerlegung

$$QS_{Zw} = n \sum\sum(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{...})^2 \qquad QS_{Inn} = \sum\sum\sum(X_{ijm} - \bar{X}_{ij.})^2$$

$$QS_A = nq\sum(\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...})^2 = nq\sum \hat{\alpha_i}^2$$

$$QS_B = np\sum(\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...})^2 = np\sum \hat{\beta_j}^2$$

$$QS_{AB} = QS_{Zw} - QS_A - QS_B = n\sum\sum \widehat{\alpha\beta}_{ij}^2$$

Freiheitsgrade

$$df_{Zw} = pq - 1 \qquad df_A = p - 1 \qquad df_B = q - 1 \qquad df_{AB} = (p-1)(q-1) \qquad df_{Inn} = pq(n-1)$$

Partielle Effektstärke

$$\eta^2_{Effekt} = \frac{QS_{Effekt}}{QS_{Effekt} + QS_{Fehler}}$$

Dreifaktorielle Varianzanalyse mit unabhängigen Gruppen

Effekte

$$\alpha_i = \mu_i - \mu \qquad \beta_j = \mu_j - \mu \qquad \gamma_k = \mu_k - \mu$$

$$\alpha\beta_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) \qquad \alpha\gamma_{ik} = \mu_{ik} - (\mu + \alpha_i + \gamma_k) \qquad \beta\gamma_{jk} = \mu_{jk} - (\mu + \beta_j + \gamma_k)$$

$$\alpha\beta\gamma_{ijk} = \mu_{ijk} - (\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk})$$

Strukturmodell

$$X_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \varepsilon_{ijkm}$$

Quadratsummenzerlegung

$$QS_{Zw} = n\sum\sum\sum(\bar{X}_{ijk\cdot} - \bar{X}_{\cdots\cdot})^2 \qquad QS_{Inn} = \sum\sum\sum\sum(X_{ijkm} - \bar{X}_{ijk\cdot})^2$$

$$QS_A = nqr\sum(\bar{X}_{i\cdots} - \bar{X}_{\cdots\cdot})^2 \qquad QS_B = npr\sum(\bar{X}_{\cdot j\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdots\cdot})^2 \qquad QS_C = npq\sum(\bar{X}_{\cdot\cdot k\cdot} - \bar{X}_{\cdots\cdot})^2$$

$$QS_{ZwAB} = nr\sum\sum(\bar{X}_{ij\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdots\cdot})^2 \qquad QS_{AB} = QS_{ZwAB} - QS_A - QS_B \qquad \text{usw.}$$

$$QS_{ABC} = QS_{Zw} - QS_A - QS_B - QS_C - QS_{AB} - QS_{AC} - QS_{BC}$$

Einfaktorieller Versuchsplan mit Messwiederholungen

Strukturmodell

$$X_{im} = \mu + \alpha_i + \pi_m + \alpha\pi_{im} + \varepsilon_{im}$$

Quadratsummenzerlegung

$$QS_A = n\sum(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 \qquad QS_{Vp} = p\sum(\bar{X}_{\cdot m} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 \qquad QS_{res} = QS_{Total} - QS_A - QS_{Vp}$$

Freiheitsgrade

$$df_A = p - 1 \qquad df_{Vp} = n - 1 \qquad df_{res} = (p-1)(n-1)$$

Zweifaktorieller Versuchsplan mit Messwiederholungen auf beiden Faktoren

Strukturmodell

$$X_{im} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \pi_m + \alpha\beta_{ij} + \alpha\pi_{im} + \beta\pi_{jm} + \alpha\beta\pi_{ijm} + \varepsilon_{ijm}$$

Quadratsummenzerlegung

$$QS_{Total} = \sum\sum\sum(X_{ijm} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{ZwVpn} = pq\sum(\bar{X}_{\cdot\cdot m} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{InnVpn} = QS_{Total} - QS_{ZwVpn}$$

$$QS_{Vp} = QS_{ZwVpn} \qquad QS_A = nq\sum(\bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_B = np\sum(\bar{X}_{\cdot j\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2$$

$$QS_{ZwAB} = n\sum\sum(\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{AB} = QS_{ZwAB} - QS_A - QS_B$$

$$QS_{ZwAVp} = q\sum\sum(\bar{X}_{i\cdot m} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{AVp} = QS_{ZwAVp} - QS_A - QS_{Vp}$$

$$QS_{ZwBVp} = p\sum\sum(\bar{X}_{\cdot jm} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{BVp} = QS_{ZwBVp} - QS_B - QS_{Vp}$$

$$QS_{ABVp} = QS_{InnVp} - QS_A - QS_B - QS_{AB} - QS_{AVp} - QS_{BVp}$$

Zweifaktorieller Versuchsplan mit Messwiederholungen auf einem Faktor

Strukturmodell

$$X_{ijm} = \mu + \alpha_i + \pi_{m(i)} + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \beta\pi_{jm(i)} + \varepsilon_{ijm}$$

Quadratsummenzerlegung

$$QS_{ZwVpn} = q\sum\sum(\bar{X}_{i\cdot m} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{InnVpn} = QS_{Total} - QS_{ZwVpn}$$

$$QS_A = qn\sum(\bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{Vp} = QS_{ZwVpn} - QS_A$$

$$QS_{ZwAB} = n\sum\sum(\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2 \qquad QS_{AB} = QS_{ZwAB} - QS_A - QS_B$$

$$QS_{BVp} = QS_{InnVp} - QS_B - QS_{AB}$$

Dreifaktorieller Versuchsplan mit Messwiederholungen auf einem Faktor

Strukturmodell

$$X_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \pi_{m(ij)} + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \gamma\pi_{km(ij)} + \varepsilon_{ijkm}$$

Dreifaktorieller Versuchsplan mit Messwiederholungen auf zwei Faktoren

Strukturmodell

$$X_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \pi_{m(i)} + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \beta\pi_{jm(i)} + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + \gamma\pi_{km(i)} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \beta\gamma\pi_{jkm(i)} + \varepsilon_{ijkm}$$

Lateinisches Quadrat

Strukturmodell (Versuchsplan mit unabhängige Gruppen)

$$X_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk}) + \varepsilon_{ijkm}$$

Strukturmodell (Versuchsplan mit Messwiederholungen)

$$X_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \pi_{m(i)} + \beta_j + \gamma_k + (\beta\gamma_{jk}) + (\beta\pi_{jm(i)} + \gamma\pi_{km(i)} + \beta\gamma\pi_{jkm(i)}) + \varepsilon_{ijkm}$$

Ungleiche Stichprobenumfänge

Einfache Varianzanalyse

Quadratsummenzerlegung (gewichtete Mittelwerte)

$$QS_{Zw} = \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \qquad QS_{Inn} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{m=1}^{n_i}(X_{im} - \bar{X}_{i.})^2$$

Quadratsummenzerlegung (ungewichtete Mittelwerte)

$$\bar{X}_{..} = \frac{\sum \bar{X}_{i.}}{p} \qquad QS_{Zw} = \bar{n}_h \sum_{i=1}^{p}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \qquad \bar{n}_h = \frac{p}{1/n_1 + 1/n_2 + \ldots + 1/n_p}$$

Freiheitsgrade

$$df_{Zw} = p - 1 \qquad df_{Inn} = \sum_{i=1}^{p}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{p} n_i - p$$

Zweifache Varianzanalyse

Quadratsummenzerlegung (ungewichtete Mittelwerte)

Beispiel: $QS_A = \bar{n}_h \sum_{i=1}^{p}(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{..})^2$

Einfache Kovarianzanalyse

Strukturmodell

$$Y_{im} = \mu + \alpha_i + \beta(X_{im} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{im}$$

Quadrat- und Produktsummen

$$SXX_{Total} = \sum\sum(X_{im} - \bar{X}_{..})^2 \qquad SYY_{Total} = \ldots \qquad SXY_{Total} = \sum\sum(X_{im} - \bar{X}_{..})(Y_{im} - \bar{Y}_{..})$$

$$SXX_{Zw} = n\sum(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{..})^2 \qquad SYY_{Zw} = \ldots \qquad SXY_{Zw} = n\sum(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{..})(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{..})$$

$$SXX_{Inn(i)} = \sum(X_{im} - \bar{X}_{i\cdot})^2 \qquad SYY_{Inn(i)} = \ldots \qquad SXY_{Inn(i)} = \sum(X_{im} - \bar{X}_{i\cdot})(Y_{im} - \bar{Y}_{i\cdot})$$

$$SXX_{Inn} = \sum SXX_{Inn(i)} \qquad SYY_{Inn} = \ldots \qquad SXY_{Inn} = \sum SXY_{Inn(i)}$$

Korrigierte Quadratsummen

$$QS^*_{Total} = SYY_{Total} - \frac{SXY^2_{Total}}{SXX_{Total}} \qquad QS^*_{Inn} = SYY_{Inn} - \frac{SXY^2_{Inn}}{SXX_{Inn}} \qquad QS^*_{Zw} = QS^*_{Total} - QS^*_{Inn}$$

Freiheitsgrade

$$df^*_{Total} = np - 2 \qquad df^*_{Zw} = p - 1 \qquad df^*_{Inn} = p(n-1) - 1$$